

# 考虑剪切效应的复合材料层合板阻尼特性研究

王文博, 漆文凯, 沈 承

(南京航空航天大学 江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016)

**摘要:** 为了对复合材料结构设计模型进行优化, 基于 Hencky 假设, 考虑剪切应力的影响, 建立了复合材料层合板的有限元分析模型, 在微观力学角度上改进 3 相桥联模型, 预测能量损耗因子, 获得目标复合材料层合板的固有频率、振型以及比阻尼容量等振动相关参数。以碳纤维材料层合板为例, 将计算结果与现有文献结果进行对比, 验证了改进模型的正确性。矩形层合板具体分析结果表明: 复合材料层合板在一端固支下, 无论是长度还是宽度的变化, 对第 1 阶固有频率的影响都很微弱; 第 4、5 阶固有频率表现出趋于同频现象, 振型也会产生类似变化趋势; 在长度和宽度变化下, 第 6 阶模态结果则表现出相反的对数变化轨迹。

**关键词:** Hencky 板 / 壳理论; 复合材料层合板; 有限元; 比阻尼容量

**中图分类号:** V258

**文献标识码:** A

**doi:** 10.13477/j.cnki.aeroengine.2018.03.010

## Research on Damping Characteristic of Composite Laminated Plates Considering Shear Effect

WANG Wen-bo, QI Wen-kai, SHEN Cheng

(Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** To optimize the composite structure design model, based on the Hencky hypothesis, the finite element analysis model of the composite laminated plates was established considering the influence of shear stress. The three-phase bridge model was improved from the angle of micromechanics, the energy loss factor was predicted, the natural frequency of the composite laminated plates, vibration parameters such as vibration mode and specific damping capacity were obtained. Taking the carbon fiber laminated plates for example, the calculation results were compared with the existing literatures, and the correctness of the improved model was verified. The analysis results of rectangular laminated plates show that, both length and width changes of the composite laminated plates, clamped on one side, has a slight influence on the natural frequency of the first order; the fourth and fifth orders tend to common frequency, and the vibration mode has the same variation tendency; while results of the sixth order mode show contrary logarithm varying trajectory as the length and width change.

**Key words:** Hencky plate / shell theory; composite laminated plates; finite element; specific damping capacity

## 0 引言

先进的复合材料作为当前最具研究前景的新型战略材料被广泛应用于航空航天结构件上。复合材料与传统广义上的混合材料的本质区别在于采用复杂的复合工艺从微观层次上将不同材料进行搭配组合, 使得各基础材料性能的不足得以互相弥补。这种制造工艺决定了复合材料具有灵活的可设计性优点, 可以通过材料设计使各材料在性能上产生预期的相互协同效应, 从而获得理想的抗疲劳、耐腐蚀、高强度质量比的新型复合材料, 满足航空发动机复杂外部环境的需求。

因此复合材料成为现阶段航空发动机结构设计中最重要先进材料之一<sup>[1-4]</sup>, 应用于风扇叶片、导流板、降噪蜂窝内衬以及外涵机匣等航空发动机冷端部件。与传统钛合金相比, 航空发动机结构中应用先进复合材料的减质效果明显。据美国 NASA 统计, 减质比可达 13.1%。然而在使用先进复合材料进行部件结构设计时, 材料的阻尼特性预测比传统钛合金复杂得多。有关复合材料层合板的研究显示, 复合层数、各层铺设角度、各层厚度与其阻尼特性有着直接联系, 因此预测和分析在复杂的外部载荷下复合材料的阻尼特性是结构设计师最关心的问题之一。国内外学者<sup>[5-11]</sup>对此做了大量研究工作, 总结了先进复合材料结构的阻尼表现机

收稿日期: 2017-09-20

作者简介: 王文博(1990), 男, 硕士, 助理工程师, 研究方向为航空发动机结构强度与振动; E-mail: 837756067@qq.com。

**引用格式:** 王文博, 漆文凯, 沈承. 考虑剪切效应的复合材料层合板阻尼特性研究 [J]. 航空发动机, 2018, 44(3): 60-64. WANG Wenbo, QI Wenkai, SHEN Cheng. Research on damping characteristic of composite laminated plates considering shear effect [J]. Aeroengine, 2018, 44(3): 60-64.

理,有纤维和基体固有的黏弹性阻尼、复合材料界面相阻尼、复合材料损伤的耗散阻尼等。

在工程应用中,对于板壳结构的处理方法有 Kirchhoff 假设和 Hencky 假设,后者相对于前者考虑了剪切变形的影响。上述研究工作中的复合材料模型大多基于 Kirchhoff 板壳假设,未考虑剪切应力对有限元模型的影响。研究表明,剪切变形对复合材料层合板结构的阻尼特性影响显著,而且影响效果随着板的厚度增加而增强。本文引入 Hencky<sup>[12-13]</sup>假设在剪切应力的影响下,建立了复合材料层合板的有限元分析模型,该模型可广泛适用于薄板和中厚板。本文利用 Matlab 软件对上述模型理论进行了计算,通过算例验证了等效损耗因子预测模型,最后具体分析了矩形层合板结构的长宽比对固有频率和振型的影响规律。

### 1 有限元模型

有限元分析关键在于计算工程结构的刚度矩阵 $[K]$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (1)$$

式中:上标  $e$  代表单元,  $V$  代表单元的体积;  $[B]$  为几何矩阵,  $[D]$  为刚度系数矩阵, 分别反映了单元内部的应变-位移关系和应变-应力关系。

#### 1.1 几何矩阵

如图 1 所示,基于 Hencky 假设下,板上任意 1 点的位移函数为

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = z\theta_y(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = z\theta_x(x, y, t) \\ \omega(x, y, z, t) = \omega(x, y, t) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\theta_y(x, y)$  和  $\theta_x(x, y, t)$  为中间层平面的转动角度。

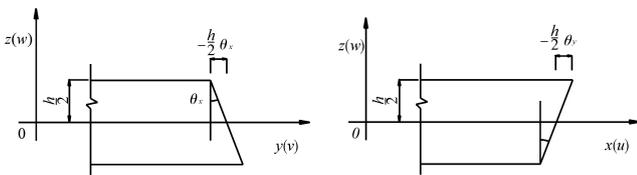


图 1 考虑剪切影响时转角与位移关系

此时,应变矩阵  $\varepsilon$  表示为

$$\{\varepsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} - \theta_x \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} + \theta_y \end{pmatrix} = [B] \{\delta\}^e \quad (3)$$

式中:  $\{\delta\}^e$  为单元的结点位移值;  $[B]$  为几何矩阵,二者详细表示如下

$$\begin{cases} \{\delta\}^e = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]^T \\ [B] = [B_1 \ \dots \ B_8] \end{cases}$$

中面为平面曲边四边形的 8 结点板单元如图 2 所示。其中面形状和厚度描述为

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, h = \sum_{i=1}^8 N_i h_i \quad (4)$$

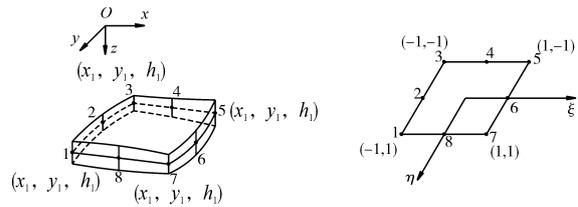


图 2 8 结点 Hencky 板单元

8 结点 Hencky 板壳单元的形函数为

$$N_i = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), (i=1, 2, 3, 4) \\ \frac{1}{2} (1 - \xi_i^2) (1 + \eta_i \eta), (i=5, 7) \\ \frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta_i^2), (i=6, 8) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $N_i(\xi, \eta)$  为局部坐标的插值函数。

而  $[B]$  矩阵要求对整体坐标进行求导,坐标转换有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中:  $[J]$  为雅可比矩阵,阶次为  $2 \times 2$ 。

结合式(2)~(5),可写出任意位置点  $i(\xi, \eta)$  的形函数  $N_i$ ,根据式(6)计算形函数  $N_i$  对坐标  $x, y$  的 1 阶偏导数。

#### 1.2 等效刚度矩阵

假设材料表现为正交各向异性,各层的应力与应变关系为

$$\{\sigma_i\} = [Q] \{\varepsilon_i\} \quad (7)$$

式中:  $[Q]$  为刚度相关矩阵,各非零元素为

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12} E_2}, Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12} E_2} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12} E_2}, Q_{44} = Q_{66} = G_{12} \\ Q_{55} = G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $E_1, E_2$  分别为材料在  $0^\circ, 90^\circ$  方向的杨氏模量;  $\nu$  为材料的泊松比。

为了体现各层的铺层方向,在微观层次下统一复合材料纤维的坐标系统,如图3所示。此时单层结构主轴方向 1-2 与  $x-y$  坐标之间的夹角为  $\theta_k (k=1, 2, \dots, n)$ 。引入坐标转换公式

$$T\{\varepsilon_i\} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 2lm & 0 & 0 \\ m^2 & l^2 & -2lm & 0 & 0 \\ -lm & lm & l^2 - m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -m \\ 0 & 0 & 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中  $l = \cos\theta, m = \sin\theta$ 。

于是,任意  $\theta$  角方向刚度矩阵可以表示为

$$[\bar{Q}_{ij}] = [T]^{-1} [Q_{ij}] [T]^T, \{\bar{\sigma}_{ij}\} = [\bar{Q}_{ij}] \{\bar{\varepsilon}_{ij}\} \quad (10)$$

$N$  层结构的层合板总应变能可写成

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\bar{\varepsilon}_{ij}\}^T [\bar{Q}_{ij}^k] \{\bar{\varepsilon}_{ij}\} dz d\Omega \quad (11)$$

式中:  $\Omega$  为待积分平面;  $h_k$  和  $h_{k-1}$  为第  $k$  层板的上、下面的坐标值。

将式(3)代入式(11)中,计算层合板刚度系数矩阵

$$\begin{cases} D_{ij} = \frac{4}{h^3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3), (i, j=1, 2, 6) \\ D_{ij} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k - h_{k-1}), (i, j=4, 5) \end{cases} \quad (12)$$

### 1.3 特征方程

层合板系统内部的总应变能为

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \quad (13)$$

式中:  $\{\delta\}$  为节点位移。

类似地,层合板总动能可表示为

$$T = -\frac{1}{2} \omega^2 \{\delta\}^T [M] \{\delta\} \quad (14)$$

式中:  $[M]$  为总质量矩阵;  $\omega$  为角频率。

根据最小势能原理

$$\frac{\partial}{\partial \delta} (U+T) = 0 \quad (15)$$

得到标准特征方程

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta\} = 0 \quad (16)$$

通过式(16)可以求得各特征值  $\omega_r$  以及相对应的各模态振型  $\delta_r$ 。

## 2 比阻尼容量

计算系统的耗散能量  $\Delta U$  与系统的最大应变能  $U$  的比值,将上述比值定义为 1 个周期内的比阻尼容量  $\phi_{SDC}$ , 即

$$\phi = \frac{\Delta U}{U} \quad (17)$$

在此基础上,假设系统结构中的耗散能量  $\Delta U$  等于各方向应力产生耗散能量之和

$$\Delta U = \frac{1}{2} \left[ \int_V \Psi_{11} \sigma_1 \varepsilon_1 dV + \int_V \Psi_{22} \sigma_2 \varepsilon_2 dV + \int_V \Psi_{13} \sigma_4 \varepsilon_4 dV + \int_V \Psi_{23} \sigma_5 \varepsilon_5 dV + \int_V \Psi_{12} \sigma_6 \varepsilon_6 dV \right] \quad (18)$$

或者简化成

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_i\}^T [\Psi] \{\sigma_i\} dV \quad (19)$$

$$\text{其中} [\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & & & & & \\ & \Psi_{22} & & 0 & & \\ & & \Psi_{12} & & & \\ & & & \Psi_{23} & & \\ & & & & \Psi_{13} & \\ & & & & & \Psi_{13} \end{bmatrix}$$

式中:  $\psi_{ij}$  为上述各向的损耗因子。

本文通过对三相桥联模型<sup>[4]</sup>等效方法进行改进求得,式(18)可以整理为

$$\int_{\Omega} \int_h \{\varepsilon\}^T [D_d] \{\varepsilon\} dz d\Omega = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\bar{\varepsilon}_{ij}\}^T [\bar{R}_{ij}^k] \{\bar{\varepsilon}_{ij}\} dz d\Omega \quad (20)$$

$$\text{其中} [\bar{R}_{ij}^k] = [T]^{-1} [\Psi] [Q_{ij}^k] [T]^T \quad (21)$$

求解等效阻尼刚度系数矩阵  $D_d$  与  $D$  类似,将式(12)中  $\bar{Q}_{ij}^k$  替换成  $\bar{R}_{ij}^k, \bar{R}_{ij}^k$  如式(21)所示。

层合板系统的耗散能  $\Delta U$  表示为

$$\Delta U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_d] \{\delta\} \quad (22)$$

式中:  $[K_d]$  为系统阻尼矩阵,其表达式虽与  $[K]$  类似,但不再是对称矩阵。

任意阶模态振型  $\delta_r$  可通过式(16)得到,最大应变能  $U$  和耗散能量  $\Delta U$  可以根据式(13)、(22)得到。将  $U$

和  $\Delta U$  代入式(17)得到各阶比阻尼容量  $\varphi_r$ 。

### 3 模型验证

本文基于 Hencky 理论假设,建立了 8 结点四边形板壳单元模型,对其各阶固有频率进行预测,并利用能量法求解各阶模态比阻尼容量。约束条件为一端固支的情况。为了验证有限元模型的有效性,首先将计算结果与文献[15]中瑞利 - 里兹法的理论值和试验结果进行比较。

目标复合材料 913C-TS 与 913C-HTA 的材料参数见表 1。

表 1 目标复合材料属性参数

	913C-TS	913C-HTA
$E_1/\text{GPa}$	110.0	124.5
$E_2/\text{GPa}$	9.0	10.2
$G_{12}/\text{GPa}$	3.9	6.3
$G_{23}/\text{GPa}$	3.9	6.3
$\nu_{12}$	0.34	0.34
$\Psi_{11}/\%$	0.75	0.55
$\Psi_{22}/\%$	5.95	4.98
$\Psi_{12}/\%$	6.79	5.92
$\Psi_{23}/\%$	6.79	5.92
$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1513	1532

目标复合材料层合板材料参数详见文献[15],对结果进行比较见表 2、3。

表 2 层合板材料 913C-TS 参数

	前 6 阶	瑞利里兹	试验	本文模型
固有频率 /Hz	1	41.0	39.2	40.1
	2	78.4	76.4	77.2
	3	114.53	111.8	112.0
	4	160.0	161.9	157.0
	5	179.2	178.6	176.0
	6	217.4	215.5	217.0
比阻尼容量 SDC	1	6.69%	8.33%	6.70%
	2	5.94%	5.36%	5.94%
	3	6.31%	7.13%	6.30%
	4	0.76%	0.67%	0.77%
	5	2.06%	2.31%	2.06%
	6	5.88%	5.51%	5.89%

注:各纤维铺层角度均为  $0^\circ$ ,  $a=252 \text{ mm}$ ,  $b=192 \text{ mm}$ ,  $h=1.155 \text{ mm}$ 。

从表中可见,在 2 种材料和铺层设置情况下,无论是固有频率或者比阻尼容量,本文提出的改进模型的

表 3 层合板材料 913C-HTA 参数

	前 6 阶	瑞利里兹	试验	本文模型
固有频率 /Hz	1	33.4	38.5	32.6
	2	73	71.4	71.5
	3	95.2	94.5	93.3
	4	98.5	101.5	96.4
	5	117.4	120.2	115.0
	6	181.4	180.9	178.0
比阻尼容量 SDC	1	3.72%	3.18%	3.75%
	2	1.20%	1.42%	1.21%
	3	0.80%	0.94%	0.81%
	4	2.40%	2.66%	2.42%
	5	1.73%	1.93%	1.74%
	6	2.49%	2.80%	2.53%

注:纤维铺层角度为  $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ ,  $a=287 \text{ mm}$ ,  $b=287 \text{ mm}$ ,  $h=1.045 \text{ mm}$ 。

预测结果与瑞利 - 里兹法解析以及文献[15]中试验结果吻合性良好,初步说明了改进模型的有效性,在原有研究基础上考虑了剪切效应的影响,可进一步用于试验测试验证及参数讨论,对碳纤维复合材料层合板等效损耗因子的研究提供了新方法,在其阻尼特性研究上具有较高的参考价值。总的来说,固有频率各结果之间的误差基本小于比阻尼容量之间的误差,侧面反映了阻尼机理的复杂性以及难以预测性。

### 4 参数讨论

根据本文建立的 Hencky 理论有限元模型详细讨论复合材料层合板的结构几何参数(主要是边长)对前 6 阶固有频率的影响,如图 4、5 所示。

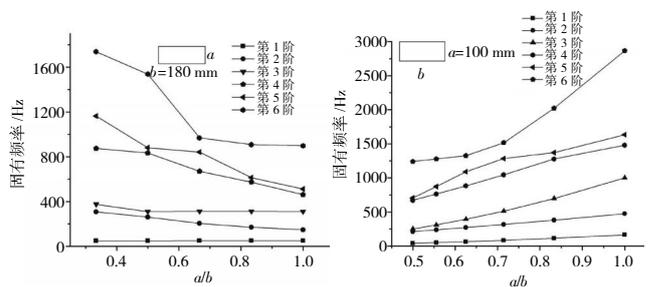


图 4 边长 a 对固有频率的影响(T300/BMP316)

图 5 边长 b 对固有频率的影响(T300/BMP316)

从图 4 中可见,第 1、3 阶固有频率变化幅度微小,其振型分别表现为 1 阶弯曲和 2 阶弯曲,说明层合板弯曲变形受宽度 a 变化影响很小;第 6 阶固有频率在各阶段的幅度变化程度不同,当边长比值在 0.6 附近时,第 6 阶固有频率幅度变化最为显著,而比值达到 0.7 时,第 6 阶固有频率变化幅度趋于平缓;(3)第 4、5

阶固有频率均随宽度  $a$  的增加呈近似线性降低,且各阶频率接近。

从图5中可见,第1、2阶固有频率表现平缓,第3~5阶固有频率均随长度减小呈一定比例线性提高,且第4、5阶固有频率变化十分接近,而第6阶固有频率受长度变化的影响同样是最为显著。

综上所述,第1阶固有频率受层合板结构的长宽比影响微小,第2~5阶频率轨迹大多呈近似线性变化,而第6阶固有频率受长宽比变化影响最大。从层合板结构几何参数上详细分析了长宽比对结构各阶模态特性的影响,对结构部件抗振优化设计有一定参考价值。

## 5 总结

本文应用 Hencky 假设,考虑剪切效应,建立了复合材料层合板结构的有限元模型,通过推导层合板总刚度、质量、阻尼矩阵,引入了耗散能原理,求解了目标算例复合材料层合板的前6阶模态及相应的比阻尼容量。将结果与现有文献的理论解进行对比,初步验证了本文改进模型的有效性,并结合试验结果进一步说明模型的准确性。

研究表明:复合材料层合板在一端固支下,无论是长度还是宽度的变化,对第1阶固有频率的影响都很微弱,而第4、5阶固有频率表现出趋于同频现象,振型也会产生类似变化趋势。而在长度和宽度变化下,第6阶模态结果则表现出相反的对数变化轨迹。

### 参考文献:

- [1] SHEN Cheng, XIN Fengxian, CHENG Li, et al. Sound radiation of orthogonally stiffened laminated composite plates under airborne and structure borne excitations [J]. *Composites Science and Technology*, 2013, 84: 51–57.
- [2] 陈祥宝. 聚合物基复合材料手册[M]. 北京: 化学工业出版社, 2004: 1–3. CHEN Xiangbao. Handbook of polymer matrix composites [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2004: 1–3. (in Chinese)
- [3] 陈绍杰. 复合材料技术与大型飞机 [J]. *航空学报*, 2008, 29(3): 605–610. CHEN Shaojie. Composite technology and large aircraft [J]. *Acta Aeronautica et Astro-nautica Sinica*, 2008, 29(3): 605–610. (in Chinese)
- [4] 杜善义. 先进复合材料与航空航天 [J]. *复合材料学报*, 2007, 24(1): 1–12. DU Shanyi. Advanced composite materials and aerospace [J]. *Acta Materi-*

- ae Compositae Sinica, 2007, 24(1): 1–12. (in Chinese)
- [5] Adams R D, Bacon D G C. Measurement of the flexural damping capacity and dynamic Young's modulus of metals and reinforced plastics [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1973, 6(1): 27.
- [6] Mahi A E, Assarar M, Sefrani Y, et al. Damping analysis of orthotropic composite materials and laminates [J]. *Composites Part B: Engineering*, 2008, 39(7): 1069–1076.
- [7] Berthelot J M, Assarar M, Sefrani Y, et al. Damping analysis of composite materials and structures [J]. *Composite Structures*, 2008, 85(3): 189–204.
- [8] Kameyama M, Arai M. Optimal design of symmetrically laminated plates for damping characteristics using lamination parameters [J]. *Composite Structures*, 2015, 132: 885–897.
- [9] 尤凤翔, 吕福和. 复合材料层合板力学性质分析及角铺设层优化设计 [J]. *噪声与振动控制*, 2009, 29(4): 138–143. YOU Fengxiang, LYU Fuhe. Analysis of mechanics properties of composite laminated plates and optimization of angle arrangement of plies [J]. *Noise Vibration and Control*, 2009, 29(4): 138–143. (in Chinese)
- [10] 漆文凯, 程博. 复合材料层合板阻尼预测分析与验证 [J]. *振动. 测试与诊断*, 2013, 33(6): 1049–1053. QI Wenkai, CHENG Bo. Analysis and verification of damping prediction of composite laminated plates [J]. *Vibration Measurement and Diagnosis*, 2013, 33(6): 1049–1053. (in Chinese)
- [11] 杨雪, 王源升, 朱金华, 等. 多层阻尼复合结构阻尼性能 [J]. *复合材料学报*, 2005, 22(3): 175–181. YANG Xue, WANG Yuansheng, ZHU Jinhua, et al. Damping properties of the composite structures with multilayered damping materials [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005, 22(3): 175–181. (in Chinese)
- [12] 曾维栋. Reissner-Mindlin 板壳无网格法研究及形状优化 [D]. 湖南湘潭: 湘潭大学, 2009. ZENG weidong. Research on Reissner-Mindlin plate shell meshless method and shape optimization [D]. Hunan Xiangtan: Xiangtan University, 2009. (in Chinese)
- [13] 王焕定, 陈少峰, 边文凤. 有限单元法基础及 Matlab 编程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 362–364. WANG Huanding, CHEN Shaofeng, BIAN Wenfeng. Fundamentals of finite element method and matlab programming [M]. Beijing: Higher Education Press, 2012: 362–364. (in Chinese)
- [14] Qi Wenkai, Xu Xiaoqiang. Analytical method of dynamical properties of FRP based on micromechanical level [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(3): 939–945.
- [15] Maheri M R, Adams R D. Modal vibration damping of anisotropic FRP laminates using the Rayleigh-Ritz energy minimization scheme [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(1): 17–29.

(编辑: 刘 静)