# 基于虚拟激励法的薄板随机振动分析

齐鸣瑞,漆文凯,王文博

(南京航空航天大学能源与动力学院,南京 210016)

摘要:针对航空发动机薄壁构件在实际工作中受到的噪声影响的问题,基于虚拟激励法原理,利用改进的傅里叶级数法处理 位移函数和白噪声激励,对薄板进行了任意弹性边界条件下的随机振动响应分析。推导并计算了白噪声激励下薄板的位移响应功 率谱,将响应功率谱与 ANSYS 自带谱分析模块结果进行对比分析,证明了改进方法的准确性。该方法使用簧代替经典边界条件,改 变弹簧的刚度系数组合可以高效准确地处理其他更复杂的结构以及边界条件。

关键词: 傅里叶级数法;任意弹性边界条件;虚拟激励法;白噪声;薄板;航空发动机 中图分类号: V:214.4+2 文献标识码:A doi:10.13477/j.cnki.aeroengine.2018.04.004

#### Random Vibration Analysis of Thin-panels Based on Virtual Excitation Method

QI Ming-rui, QI Wen-kai, WANG Wen-bo

(College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: To investigate the influence of noise on thin-panels of aeroengine in actual operation, the displacement function and white noise excitation were processed by the improved Fourier series method based on the virtual excitation method, and the random vibration response analysis of thin-panels was carried out under arbitrary elastic boundary conditions. The displacement response power spectrum of thin plates was deduced and calculated under the white noise excitation, and the response power spectrum was compared with the results of the ANSYS spectrum analysis module, the accuracy of the improved method was proved. This method used springs instead of classical boundary conditions and changed the stiffness coefficient combinations of springs to deal with other more complicated structures and boundary conditions efficiently and accurately.

Key words: Fourier series; arbitrary elastic boundary conditions; virtual excitation method; white noise; thin-panels; aeroengine

# 0 引言

薄壁结构作为航空发动机及飞机的基本构件之一,各种约束条件下的计算研究受到国内外学者的普遍关注,应用不同方法对薄壁结构的弯曲振动进行研究,例如:Rao G V、Mirza W H、Kerstens J G M 等<sup>11-31</sup>采 用有限元法、Narita Y、Kim C S、Laura P A A 等<sup>14-61</sup>采用 瑞利 – 李兹法、Li W L<sup>17-81</sup>采用改进的傅里叶级数法、贺 国京等<sup>191</sup>应用能量泛函角度将位移量分离为静态位移 和动态位移,研究了不同边界条件下矩形薄板的弯曲 振动;陈英杰<sup>101</sup>以混合变量的形式求解了不同边界条 件下受均布载荷的薄板弯曲情况;鲍四元、姚伟岸、邢 誉峰等<sup>111-13</sup>采用辛对偶求解法获得了矩形薄板自由、受

# 迫振动问题的通用解析解,克服了不同边界采用不同 位移函数的传统弊端,明显提升了计算效率。

航空发动机以及飞机中的薄壁结构在实际使用 过程中通常伴随着噪声的作用,噪声载荷是有一定频 率特性的随时间、空间分布的随机压力载荷,从而会 引起结构的随机振动。林家浩<sup>[14]</sup>提出的虚拟激励法 (PEM)很好地解决了工程中研究复杂结构的随机振 动方法中计算效率低、误差大的问题;许多学者<sup>[15-19]</sup>已 经将 PEM 应用在航空航天、汽车制造、高速列车、海 洋工程以及桥梁抗震等领域。与常规 CQC(完全二次 相组合方法)法以及 SRSS(平方和开平方法)法相比, 在随机振动研究中 PEM 由于其计算精度准确、效率 高而广受欢迎。

**收稿日期:**2017–12–09 **基金项目:**南京航空航天大学研究生创新基地(实验室)开放基金(kfjj20160211)资助 作者简介:齐鸣瑞(1993),男,在读硕士研究生,研究方向为航空发动机构件结构动力特性分析;E-mail:821041377@qq.com。

**引用格式:** 齐鸣瑞,漆文凯,王文博.基于虚拟激励法的薄板随机振动分析[J].航空发动机,2018,44(4):21-25.QI Mingrui, QI Wenkai, WANG Wenbo. Random vibration analysis of thin-panels based on virtual excitation method[J].Aeroengine,2018,44(4):21-25.

本文利用改进的傅里叶级数法对位移函数和激 励进行傅里叶展开,通过改变弹簧刚度模拟常用边界 条件,利用 PEM 将白噪声激励构造成简谐激励,对动 力学微分方程进行求解,计算结构位移响应功率谱密 度,并将结果与有限元软件仿真进行对比。

#### 理论模型 1

以矩形薄壁板为研究对象,如图1所示。在边界 上设置横向位移约束弹簧和旋转约束弹簧,所有的经 典边界条件(自由、简支和固支)都能通过指定弹簧系 数设置为无穷大或零来获得。当约束横向位移方向弹 簧的刚度值为无穷大,而约束旋转弹簧的刚度值为 零,即可实现简支边界。

在噪声载荷 P(x,y,t)作用下,薄壁板受迫振动方



#### 图 1 薄壁板结构通用弹性边界模型

程为

$$D \nabla^{4} w + \rho h \frac{\partial^{2} w}{\partial t^{2}} = P(x, y, t)$$
(1)

假设解的形式为

$$w = \sum_{m=1}^{N} T_m(t) W_m(x, y)$$
 (2)

则矩形薄板的横向振动微分方程为

$$D \nabla {}^{4}w(x,y) - \rho h \omega^{2} W(x,y) = P(x,y)$$
(3)

弹性支撑边界条件为

$$x=0: \begin{cases} k_{x0}W = -D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) \\ K_{x0}\partial W/\partial x = D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$
$$x=a: \begin{cases} k_{xa}W = D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) \\ K_{xa}\partial W/\partial x = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

$$y=0: \begin{cases} k_{y0}W = -D\left(\frac{\partial^{3}W}{\partial x^{2}\partial y} + \frac{\partial^{2}W}{\partial y^{3}}\right) \\ K_{y0}\partial W/\partial y = D\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} + \mu\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}\right) \end{cases}$$
(4)
$$y=b: \begin{cases} k_{yb}W = D\left(\frac{\partial^{3}W}{\partial x^{2}\partial y} + \frac{\partial^{3}W}{\partial y^{3}}\right) \\ K_{yb}\partial W/\partial y = -D\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}} + \mu\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}\right) \end{cases}$$

式中:k、K 分别为横向位移约束弹簧和旋转约束弹簧 的刚度系数,当 $k_{K=\infty}$ 时,表示固支约束;当 $k_{K=0}$ 时,表示自由;当 k=∞,K=0 时,表示简支约束。通过 改变 k = K 的数值,可以模拟不同的边界条件,提高 了算法的通用性和计算效率。

# 2 位移函数

对薄壁板的位移函数进行改进傅里叶级数展开, 表示成1个2维傅里叶双重余弦级数和8个辅助多 项式的组合形式

$$W(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{bn} y +$$
$$\sum_{l=1}^{4} \left( \xi_{b}^{l}(y) \sum_{m=0}^{\infty} c_{m}^{l} \cos \lambda_{am} x + \xi_{a}^{l}(x) \sum_{n=0}^{\infty} d_{n}^{l} \cos \lambda_{bn} y \right) \quad (5)$$

式中: $\lambda_{am}=m\pi/a, \lambda_{bn}=n\pi/b; Amn c_m^l, d_n^l$ 为傅里叶展开 系数和辅助项系数。

假设关于 x 的辅助项为

$$\begin{cases} \xi_a^1(x) = \frac{9a}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a}{12\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \\ \xi_a^2(x) = -\frac{9a}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a}{12\pi} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \\ \xi_a^3(x) = \frac{a^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a^3}{3\pi^3} \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \\ \xi_a^4(x) = -\frac{a^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a^3}{3\pi^3} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \\ \xi_a^4(x) = -\frac{a^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a^3}{3\pi^3} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \\ \ddagger \ddot{R} \Xi \end{cases}$$
(6)

其满

$$\xi_{a}^{1'}(0) = \xi_{a}^{2'}(a) = \xi_{a}^{3''}(0) = \xi_{a}^{4''}(a) = 1$$

关于 y 的辅助项为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_{b}^{l}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\beta}_{n}^{l} \cos \lambda_{bn} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\xi}_{b}^{l''}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\beta}_{n}^{l'} \cos \lambda_{bn} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\xi}_{b}^{l(4)}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\beta}_{n}^{l''} \cos \lambda_{bn} \boldsymbol{y} \end{cases}$$
(7)

同样将载荷进行傅里叶展开为

$$\widetilde{P}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{nm} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

其中,系数

$$q_{nn} = \frac{4}{ab} \int_{0}^{b} \int_{0}^{a} q(x,y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (8)$$

将位移函数(5)带入边界条件(4)及微分控制方程(3),并根据余弦函数的正交性,可得

$$\left(K - \frac{\rho h \overline{\omega}^2}{D} M\right) A = q \tag{9}$$

# 3 平稳随机响应算法

# 3.1 常规算法

目标结构施加均匀平稳的随机激励,采用模态振 型叠加法求解动力学方程。考虑所有参振振型耦合 项,通过频响函数计算结构的响应谱

$$S_{yy}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \gamma_{j} \gamma_{i} \boldsymbol{\Phi}_{j} \boldsymbol{\Phi}_{i}^{T} \boldsymbol{H}_{j}^{*}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{H}_{i}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{S}_{xx}(\boldsymbol{\omega}) \quad (10)$$

式中: $\gamma_i$ 、 $\Phi_i$ 、 $H_i(\omega)$ 、 $S_x(\omega)$ 分别为第*i*阶振型参与系数、第*i*阶振型、频响函数和激励功率谱。

因为式(10)考虑了振型耦合,故称为 CQC 方法。 使用模态振型叠加法(式(10))应用于复杂结构时,计 算量较大。为减小计算量,对式(10)进行简化近似处 理,忽略交叉项,得到

$$S_{yy}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\Phi}_i^T | H_i(\boldsymbol{\omega}) |^2 S_{xx}(\boldsymbol{\omega}) \qquad (11)$$

上述忽略模态振型耦合项的方法称为 SRSS 方法。虽然该方法效率高,但是不适用于大部分结构(尤 其是3维结构)。

#### 3.2 虚拟激励法

当单点平稳随机激励作用于线性系统时,记自谱 密度为 S<sub>x</sub>(ω),其振动响应的自功率谱为

$$S_{yy}(\boldsymbol{\omega}) = |H(\boldsymbol{\omega})|^2 S_{xx}(\boldsymbol{\omega})$$
(12)

当随机激励被  $\sqrt{S_{xx}} e^{i\omega t}$  替代即构造一虚拟激励

时,响应为 $y = \sqrt{S_{xx}} He^{i\omega t}$ 。则响应的功率谱矩阵为

$$[S_{yy}(\boldsymbol{\omega})] = \{\tilde{y}\}^* g\{\tilde{y}\}^T \tag{13}$$

即响应矩阵共轭和响应矩阵转置相乘得响应谱 矩阵。显然,虚拟激励法在精确度上与 CQC 法并无差 距,但计算量大幅减小。此外应用虚拟激励法较方便, 保证响应与激励之间为线性关系即可。

# 4 算例分析

取薄壁板算例,其薄壁板结构尺寸长宽高分别为 510、270、1.3 mm,弹性模量 E=71 GPa,密度  $\rho=2796$  kg/m<sup>3</sup>,泊松比 $\mu=0.3$ 。取中点处(x=0.255, y=0.135)的 位移响应,计算响应功率谱密度函数,并将计算结果 与文献[20]中的结果进行对比。

设有限带宽白噪声,其功率谱密度函数为 $S_0(\overline{\omega})$ = $\frac{4}{\Delta \overline{\omega}} \times 10^{\frac{S_n}{10}-10}$ ,其中声压级取 $S_n$ =134 dB, $\Delta \overline{\omega}$ 为带宽频率。

4.1 简支边界

取 4 边简支边界条件(*k*=∞,*K*=0),带宽频率为 0~750 Hz, 以涵盖结构前 10 阶固有频率,ANSYS 谱 分析取前 10 阶模态应用叠加法计算,见表 1。

.. . . . . . .

	表 1 简支边界前	「10 阶固有频率	经对比 Hz
模态阶数	傅里叶法	有限元法	文献方法
1	54.62	54.61	54.69
2	90.45	90.42	90.60
3	150.19	150.21	150.46
4	182.55	182.81	182.83
5	218.20	218.60	218.75
6	233.82	234.04	234.27
7	277.66	278.38	278.61
8	341.33	341.95	342.02
9	360.92	362.34	362.42
10	395.30	396.97	396.41

从表中可见,在简支边界条件下,3种方法求解 出的前10阶固有频率在低阶处差别很小;而阶数越 高,理论方法与有限元方法比较,结果偏小。

绘制中点处的位移响应功率谱,如图2所示。



从图中可见,采用虚拟激励法经过 MATLAB 编 程和利用有限元软件自带谱分析模块算得的位移功 率谱重合度较高,而利用文献中引入结合受纳函数的 方法估算的位移响应功率谱在低谷处差距较大,这是 由于结合受纳函数是通过用波长表示的薄板振型函 数和假设结果表面声压为2维正弦波求得的,属于近 似估算解,而虚拟激励法和有限元方法皆是对结构振 动响应进行精确计算。3种方法计算位移响应功率谱 曲线的峰值出现位置一致,分别是结构第1、3、8、10 阶模态频率处,即54.62、150.10、341.33、395.30 Hz处。

#### 4.2 固支边界

4 边设置固支约束(*k*,*K*=∞),带宽频率为 0~870 Hz,以涵盖结构的前 20 阶固有频率值,ANSYS 谱分 析时取前 20 阶模态结果,采用模态叠加法计算。

固支边界下前 10 阶固有频率对比见表 2。从表 中可见,固支约束下有限元方法求得的模态固有频率 比理论解稍有偏差,且高阶处偏差较小。

绘制中点处的位移响应功率谱,如图3所示。

	表 2	固支边界下前 10 阶固	有频率对比 Hz
模态阶数	•	傅里叶法	有限元法
1		107.69	107.90
2		143.71	144.28
3		207.41	208.76
4		277.20	278.66
5		297.93	300.64
6		311.76	314.48
7		371.14	376.65
8		413.89	418.81
9		456.19	466.64
10		530.80	536.88





从图中可见,采用虚拟激励法经过 MATLAB 编 程和利用有限元软件自带谱分析模块算得的位移功 率谱在低频处重合度较好,高频部分差距较大,但是 2 种方法峰值出现时所对应的频率值相差很小,分别 是各自结构的第1、3、8、10 阶模态频率处。

比较上述2种边界条件下位移功率谱密度计算 结果可得:

(1)位移响应出现多个峰值,表明响应是多模态的叠加,结构响应具有明显的多模态特征。

(2)位移响应功率谱曲线在研究频带范围内存在 多个峰值,结合结构的模态频率值,表明这些峰值为 相应位置处的模态频率处产生的位移响应,发生了结 构共振效应,说明这些频率所对应的模态的参振系数 较高,在结构分析时需加大关注度。

(3)基频处位移响应峰值最大,说明基频模态起 主导作用。

# 5 结束语

本文结合改进的傅里叶级数法和虚拟激励法,对 薄壁板进行了不同边界条件下的随机振动响应分析。 将4边固支和4边简支边界下的位移函数用改进的 傅里叶级数表示,并对激励进行傅里叶级数展开,利 用 PEM 处理白噪声激励,实现了白噪声类型激励下 的位移响应功率谱的理论推导和计算。利用有限元软 件对相同条件下的薄板进行了模拟计算,并结合文献 计算结果,将三者所得响应谱进行对比验证,发现本 文方法较文献方法与有限元结果有更高的重合度,并 验证了改进方法的准确性。同时通过使用弹簧代替经 典边界条件,改变弹簧的刚度系数组合,可以高效准 确地解决其他更复杂的结构以及边界条件,提高方法 的适用性。

### 参考文献:

- Rao G V. Fundamental frequency of a square panel with multiple point supports on edges [J]. Journal of Sound & Vibration, 1975, 38(2): 271.
- [2] Mirza W H, Petyt M. On the vibration of point-supported plates [J]. Journal of Sound & Vibration, 1971, 15(1):143-145.
- [3] Kerstens J G M, Laura P A A, Grossi R O, et al. Vibrations of rectangular plates with point supports: comparison of results [J]. Journal of Sound & Vibration, 1983, 89(2):291–293.
- [4] Narita Y. Note on vibrations of point supported rectangular plates [J]. Journal of Sound & Vibration, 1984, 93(4):593-597.

- [5] Kim C S, Dickinson S M. The flexural vibration of rectangular plates with point supports [J]. Journal of Sound & Vibration, 1987, 117(2): 249–261.
- [6] Laura P A A, Guti é rrez R H. Transverse vibrations of thin, elastic plates with concentrated masses and internal elastic supports [J]. Journal of Sound & Vibration, 1981, 75(1):135–143.
- [7] Li W L. Free vibrations of beams with general boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(4):709–725.
- [8] Li W L, Bonilha M W, Xiao J. Vibrations and power flows in a coupled beam system [J]. Journal of Vibration & Acoustics, 2007, 129(5): 237-244.
- [9] 贺国京,陈大鹏.动态有限元法及其在薄板弯曲振动中的应用[J]. 铁道科学与工程学报,1999,17(1):1-6.

HE Guojing, CHEN Dapeng. Dynamic finite element method and its application in thin plate bending vibration[J].Journal of Railway Science and Engineering, 1999, 17(1):1-6. (in Chinese)

[10] 陈英杰,霍会坛,冯晓虹. 混合变量法在混合边界条件下矩形板弯曲问题中的应用[J]. 结构工程师,2014,30(2):56-61.

CHEN Yingjie, HUO Huitan, FENG Xiaohong. Application of mixed variable method to bending problem of rectangular plate under mixed boundary condition [J].Structural Engineer, 2014, 30 (2):56–61. (in Chinese)

- [11] 鲍四元,邓子辰. 辛几何形态下不同边界条件的薄板解析解[J]. 动力学与控制学报,2006,4(4):370-374.
  BAO Siyuan, DENG Zichen. Analytical solution of thin plate with different boundary conditions in symplectic geometry [J]. Journal of Dynamics and Control, 2006, 4(4):370-374. (in Chinese)
- [12] 姚伟岸,蔡智宇,胡小飞. 矩形正交各向异性薄板弯曲受迫振动问题的分析解[J]. 动力学与控制学报,2011,9(1):12-17.
  YAO Weian,CAI Zhiyu,HU Xiaofei. Analytical solution of bending forced vibration of rectangular orthotropic thin plate [J]. Journal of Dynamics and Control,2011,9(1):12-17. (in Chinese)
- [13] 邢誉峰,钱志英.简支平面问题模态函数的辛对偶直接解法[C]// 中国力学学会大会2005论文摘要集(上).中国力学学会,北京工 业大学:2005:1.

XING Yufeng, QIAN Zhiying. Symplectic direct solution of modal functions for simply supported plane problems [C]//Chinese Society of Mechanics Academic Conference '2005 Abstracts (up), Chinese Society of Mechanics, Beijing University of Technology:2005:1.(in Chinese)

[14]林家浩,钟万勰,张亚辉.大跨度结构抗震计算的随机振动方法[J]. 建筑结构学报,2000,21(1):29-36.

LIN Jiahao,ZHONG Wanxie,ZHANG Yahui. Stochastic vibration method for seismic calculation of large span structures [J]. Journal of Building Structures,2000,21 (1):29–36.(in Chinese)

 [15] 戴新进. 复合材料结构随机振动的虚拟激励法及在航空航天领域 的应用[D]. 大连理工大学,2007.
 DAI Xinjin. Virtual excitation method for random vibration of

composite structures and its application in aerospace [D].Dalian: Dalian University of Technology, 2007.(in Chinese)

[16] 李杰,王文竹,赵旗,等. 基于虚拟激励法的军用汽车随机振动分析[J]. 汽车工程,2016,38(3):368-372.

LI Jie, WANG Wenzhu, ZHAO Qi.Random vibration analysis of military vehicles based on virtual excitation method [J]. Automotive Engineering, 2016, 38(3): 368–372. (in Chinese)

- [17] 宋泳霖,曲家桢,耿海璇. 基于虚拟激励法的城轨车风缸吊座随机 应力分析[J]. 机电一体化,2016(9):25-28. SONG Yonglin,QU Jiazhen,GENG Haixuan. Stochastic stress analysis of windmill hanging hanging of urban railcar based on virtual excitation method[J]. Mechatronics, 2016(9):25-28.(in Chinese)
- [18] 宗智,吴锋. 海洋立管涡激损伤分析的虚拟激励法概述[J]. 应用数 学和力学,2017,38(1):60-66.

ZONG Zhi, WU Feng. A virtual incentive method for vortex-induced damage analysis of marine [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(1):60-66.(in Chinese)

[19] 王波,马长飞,刘鹏飞,等. 基于随机地震响应的斜拉桥粘滞阻尼 器参数优化[J]. 桥梁建设, 2016,46(3):17-22.

WANG Bo, MA Changfei, LIU Pengfei, et al. Parameter optimization of viscous dampers for cable-stayed bridges based on random seismic response[J].Bridge Construction, 2016, 46(3):17-22.(in Chinese)

- [20] 沙云东.航空薄壁结构在随机声载荷作用下的振动响应研究[D].沈阳:东北大学,2006.
  - SHA Yun Dong.Vibration response investigation on aircraft thin structure under random acoustic loads [D].Shenyang:North-East University,2006.(in Chinese)

(编辑:刘 静)