

基于指数分布第 K 次序统计量试验寿命可靠性 评估方法

牟园伟¹, 陆山²

(1. 中国航空发动机研究院, 北京 101304; 2. 西北工业大学 动力与能源学院, 西安 710072)

摘要: 针对航空发动机部分元器件或系统的可靠性评估和可靠性试验设计问题, 推导了寿命服从指数分布时基于任意第 k 次序统计量的试验寿命可靠性评估理论公式, 并给出了置信度为 90%、95% 时基于第 k 次序统计量的可靠寿命试验设计系数表。结果表明: 采用该方法可确定给定可靠度、设计寿命、破坏数及子样数时的最短试验时间, 或者给定设计寿命、可靠度、置信度、子样数及试验时间时最大允许故障数。综合考虑试验件数量及试验时间, 可对寿命可靠性试验进行成本优化设计。

关键词: 指数分布; 试验寿命; 可靠性评估; 航空发动机

中图分类号: TB114.3

文献标识码: A

doi: 10.13477/j.cnki.aeroengine.2019.04.003

Reliability Assessment Method of Test Life Based on K th Order Statistics of Exponential Distribution

MU Yuan-wei¹, LU Shan²

(1. Aero Engine Academy of China, Beijing 101304, China;

2. School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The theoretical formula of reliability assessment of test life based on arbitrary k th order statistics was derived when the life obeyed exponential distribution for the reliability assessment and reliability test design of some components or systems of aeroengine. The design coefficient table of reliability life test based on k th order statistics was given when the confidence level was 90% and 95%. The results show that the shortest test time for given reliability, design life, failure number and subsample number, or the maximum allowable fault number for given design life, reliability, confidence, subsample number and test time can be determined by using this method. Considering the number of test pieces and test time synthetically, the cost optimization design of life reliability test can be carried out.

Key words: exponential distribution; test life; reliability assessment; aeroengine

0 引言

建立合理和良好的定寿方法以确定发动机零部件或系统寿命, 是航空发动机研制的迫切需要。以涡轮盘为例, 从 20 世纪 60 年代起, 逐渐发展验证了由全尺寸盘试验给出带可靠度的预定安全寿命定寿方法^[1-4]。不同的零部件或系统由于使用要求和故障模式的差异, 其安全寿命定寿方法也有所不同^[5-10]。寿命英国国防标准 DEFSTAN 00-971^[11]在假设寿命服从对数正态分布的前提下, 采用散度因子法处理试验寿

命, 给出了轮盘基于最差试件寿命、最好试件寿命和中位寿命的安全寿命, 但仅限于寿命散度等于 6, 即对数寿命方差 $\sigma = 0.13$ 的特殊情形; 文献[12]给出了寿命服从对数正态分布、基于 n 个子样中任意第 k 次序统计量的试验寿命分散系数计算公式; 对于寿命分布服从威布尔分布的零件, 美国空军《航空涡喷涡扇涡轴涡桨发动机通用规范》^[13]中给出了零件可靠寿命零故障试验设计示例, 其中用到置信度为 90% 时的 2 个寿命试验设计系数表。但相关文献均未给出试验设计方法的理论公式及相应系数表构造方法。对此, 文

收稿日期: 2018-09-04

作者简介: 牟园伟(1984), 男, 博士, 高级工程师, 主要从事航空发动机强度、寿命与可靠性研究工作; E-mail: mywawic@163.com。

引用格式: 牟园伟, 陆山. 基于指数分布第 K 次序统计量试验寿命可靠性评估方法 [J]. 航空发动机, 2019, 45 (4): 16-19. MU Yuanwei, LU Shan. Reliability assessment method of test life based on k th order statistics of exponential distribution [J]. Aeroengine, 2019, 45(4): 16-19.

献[14]解析该试验设计方法的理论公式和系数表构造方法,并给出置信度95%时的2个寿命试验设计系数表。对于发动机系统或其电子器件,寿命近似服从指数分布,但还没有文献给出该类试验设计方法。

本文拟解析该试验设计方法的理论公式和系数表构造方法,给出置信度为90%、95%时的2个寿命试验设计系数表,并给出采用该方法进行寿命可靠性试验设计算例。

1 基于指数分布第k次序统计量的寿命可靠性评估

假设寿命分布服从指数分布,试验寿命 t 的第 k 次序统计量 $T(k)$ 的分布函数^[15]为

$$F_{T(k)} = P\{t_{(k)} \leq t\} = P\left\{\sum_{i=k}^n \{V_n(t)=i\}\right\} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(t)} X^{k-1}(1-x)^{n-k} dx \quad (1)$$

式中: $V_n(t)$ 为总体 T 作 n 次重复独立观测事件 $\{T \leq t\}$ 出现的次数。

次序统计量的密度函数等于其分布函数的1阶导数

$$f_{T(k)}(t) = F'_{T(k)}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(t)]^{k-1} (1-F(t))^{n-k} f(t) \quad (2)$$

在 $k=1$ 和 $k=n$ 时,分别是最小次序统计量 $T(1)$ 和最大次序统计量 $T(n)$ 。

某器件母体的故障时间分布服从指数分布

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

式中: λ 为失效率。

设 $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ 为取自母体的随机样本, n 为子样数。将母体故障时间分布函数与 $k=1$ 代入式(2)并积分得

$$F_{T_1}(t) = 1 - \exp(1 - \lambda nt) \quad (4)$$

将母体故障时间分布函数与 $k=2$ 代入式(2)并积分得

$$F_{T_2}(t) = 1 - n \exp(-(n-1)\lambda t) + (n-1) \exp(-n\lambda t) \quad (5)$$

采用数学归纳法导出第 k 次序统计量的分布函数

$$F_{T_{(k)}}(t) = 1 - \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left\{ \frac{1}{n-k+1} [1-F(t)]^{n-k+1} - \frac{C_{k-1}^{k-2}}{n-k+2} [1-F(t)]^{n-k+2} + \frac{C_{k-1}^{k-3}}{n-k+3} [1-F(t)]^{n-k+3} \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{n} [1-F(t)]^n, k=1, 2, 3, \dots \right\} \quad (6)$$

令 t_γ 为置信度 $1-\gamma$ 时的单侧置信限,可建立如下概率条件

$$P\{t_{(k)} > t_\gamma\} = 1 - F_{T_{(k)}}(t_\gamma) = \gamma \quad (7)$$

由式(6)、(7)可得到基于第 k 故障试验寿命的可靠性评估通用公式。

当 $k=1$ 时

$$\exp(-\lambda n t_\gamma) = \gamma \quad (8)$$

在已知置信度 $1-\gamma$ 、样本数 n 和失效率 λ 条件下,可得出第1个失效试件的失效时间下限

$$t_1 = -\ln \gamma / \lambda n \quad (9)$$

在 t_1 时刻, n 个样本零故障;反之,已知试验时间、置信度和失效率也可求出所需试验样本数

$$n = -\ln \gamma / \lambda t_1 \quad (10)$$

当 $k=2$ 时

$$1 - n \exp[-(n-1)\lambda t] + (n-1) \exp(-n\lambda t) = \gamma \quad (11)$$

令 $y = \exp(-\lambda t)$,将 y 带入式(11)得

$$(n-1)y^n - ny^{(n-1)} + \gamma = 0 \quad (12)$$

在已知置信度 $1-\gamma$ 、样本数 n 条件下,求得方程大于0小于1的根 y_2 ,可得出第2个失效器件故障时间下限

$$t_2 = -\frac{1}{\lambda} \ln y_2 \quad (13)$$

在 t_2 时刻, n 个样本只发生1次故障。

2 可靠寿命试验设计用系数表

根据式(9)、(10)计算得出零故障试验方案中置信度为90%时 λt_1 及样本数 n 的系数,见表1、2。从表中可见,本文结果与文献[14]中给出的相应数据几乎一致,说明本文所推导公式正确,可利用其编程计算零故障或小子样故障可靠寿命试验设计用系数。基于第 k 类故障的可靠寿命试验设计用系数见表3、4。

表1 零故障($k=1$)可靠寿命试验设计用系数

n	3	10	30
文献[6]	0.767	0.230	0.077
本文	0.768	0.230	0.077

表2 零故障($k=1$)可靠寿命试验所需样本数

λt_1	3	10	30
文献[6]	8	4	3
本文	8	4	3

表 3 基于第 k 故障的可靠寿命试验设计用系数 λt_k (置信度为 90%)

k	n											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
1	2.303	1.151	0.768	0.576	0.461	0.384	0.329	0.288	0.256	0.230	0.115	0.077
2		2.970	1.631	1.138	0.877	0.714	0.603	0.521	0.459	0.411	0.200	0.132
3			3.366	1.948	1.400	1.099	0.907	0.773	0.674	0.597	0.281	0.184
4				3.650	2.187	1.605	1.278	1.065	0.915	0.802	0.363	0.235
5					3.870	2.380	1.774	1.429	1.201	1.038	0.447	0.286
6						4.051	2.541	1.918	1.559	1.319	0.536	0.339
7							4.204	2.679	2.044	1.674	0.630	0.393
8								4.336	2.801	2.156	0.730	0.448
9									4.453	2.909	0.838	0.506
10										4.558	0.955	0.565

表 4 基于第 k 故障的可靠寿命试验设计用系数 λt_k (置信度为 95%)

k	n											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
1	2.996	1.498	0.999	0.749	0.599	0.499	0.428	0.374	0.333	0.300	0.150	0.100
2		3.676	2.000	1.392	1.071	0.872	0.735	0.636	0.561	0.501	0.243	0.161
3			4.077	2.327	1.665	1.304	1.075	0.916	0.798	0.707	0.332	0.217
4				4.363	2.571	1.876	1.490	1.240	1.064	0.933	0.421	0.273
5					4.585	2.767	2.050	1.646	1.381	1.192	0.513	0.328
6						4.766	2.930	2.197	1.779	1.503	0.608	0.384
7							4.920	3.071	2.325	1.897	0.709	0.442
8								5.053	3.194	2.439	0.817	0.501
9									5.170	3.303	0.932	0.562
10										5.275	1.059	0.626

3 可靠寿命试验设计算例

算例 1:已知某系统寿命分布服从指数分布,选定子样数 $n=4$,置信度 $1-\gamma=95\%$,系统在 $t=50\text{ h}$ 时,可靠度 $R=99.9\%$,要求确定最短零故障试验时间。

寿命指数分布可靠度为

$$R=\exp(-\lambda t) \tag{14}$$

该系统寿命在 50 h 时,可靠度目标是 99.9% ,即 $R(50)=99.9\%$ 。由式 (14) 解出对应的失效率为 2.001×10^{-5} 。由表 4 查得子样数为 4 时, $\lambda t_1=0.749$, $t_1=37431.3$,第 1 个失效系统的失效时间下限为 37431.3。因此,为了满足 50 h 时可靠度 $R=99.9\%$,必须将 4 套系统试验到 37431.3 h,而没有 1 套系统发生故障,则试验通过。

算例 2:已知某器件寿命分布为指数分布,子样数为 20,置信度为 90%,失效数为 5,试验时间为 1000 h,求可靠度为 99%时的器件寿命。

已知第 6 个失效器件的失效时间下限为 1000 h,则 $t_6=1000$,由表 3 查得子样数为 20 时, $\lambda t_6=0.536$, $\lambda=0.536 \times 10^{-3}$,由式(14)得出可靠度为 99%时的器件寿命为 18.8 h。

算例 3:已知某批器件寿命分布服从指数分布,子样数为 10,试验时间为 10000 h,要求可靠度为 99%,置信度为 0.95 的寿命为 100 h,估计可以接受此批器件的故障数最大值。

已知 $R(100)=99\%$,由式 (14) 得出失效率为 1.005×10^{-4} , $t_k=10000$, $\lambda t_k=1.005$ 。由表 4 查得子样数为 10 时, $\lambda t_4=0.933$, $\lambda t_5=1.192$, $4 < k < 5$,因此,可以接受此批器件的故障数最大值为 4。

4 结论

(1)推导了寿命服从指数分布时,基于第 k 次序统计量的试验寿命可靠性理论计算公式。通过在给定参数下计算所得的结果与文献[14]中的相应值进行

比较,验证了计算公式的正确性,并通过算例说明了该公式在可靠寿命试验设计中的应用。

(2) 给出了置信度为 90%、95% 时基于第 k 次序统计量的可靠寿命试验设计评估表。在给定置信度、破坏数、可靠度、试验截止时间、样本数的情况下,根据该评估表可确定试验对象的可靠寿命,也可以给定可靠寿命反推试验截止时间或者其故障数。综合考虑试验件数量及试验时间,可对寿命可靠性试验进行成本优化设计。

参考文献:

- [1] 龚梦贤,黄庆东,肖育祥,等.某型发动机第 I 级涡轮盘低循环疲劳试验研究[J].燃气涡轮试验与研究,1998,11(3):40-45.
GONG Mengxian, HUANG Qingdong, XIAO Yuxiang, et al. An experimental study on low cycle fatigue life of an aeroengine' 1st stage turbine disk [J]. Gas Turbine Experiment and Research, 1998, 11(3): 40-45. (in Chinese)
- [2] 陆山,杨剑秋.基于小子样最差和最好试验结果的寿命分散系数法[J].机械科学与技术,2006,25(1):99-101.
LU Shan, YANG Jianqiu. Life scatter factor method based on the worst and the best experiment results of small samples[J]. Mechanical Science and Technology, 2006, 25(1): 99-101. (in Chinese)
- [3] 龚梦贤,古远兴,王旅生.某型发动机 I 级涡轮盘的技术寿命[J].燃气涡轮试验与研究,2000,13(4):22-26.
GONG Mengxian, GU Yuanxing, WANG Lyusheng, et al. Service life of an aeroengine' 1st stage turbine disk[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2000, 13(4): 22-26. (in Chinese)
- [4] 贺小帆,刘文珽.服从不同分布的疲劳寿命分散系数分析[J].北京航空航天大学学报,2002,28(1):47-49.
HE Xiaofan, LIU Wenting. On scatter factors of fatigue life obeying distributions[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(1): 47-49. (in Chinese)
- [5] 杨俊,王建,祈圣英.疲劳寿命分散系数的确定与应用研究[J].航空发动机,2015,41(1):16-21.
YANG Jun, WANG Jian, QI Shengying. Determination and application of fatigue scatter factors[J]. Aeroengine, 2015, 41(1): 16-21. (in Chinese)
- [6] 王东艺,彭正华,詹洪飞.航空发动机初始放飞寿命应用研究[J].航空发动机,2014,40(3):90-94.
WANG Dongyi, PENG Zhenghua, ZHAN Hongfei. Research on application of aeroengine initial flight life [J]. Aeroengine, 2014, 40(3): 90-94. (in Chinese)
- [7] 甘晓华,李伟.现役航空发动机使用寿命确定和控制方法[J].航空工程进展,2000,1(2):103-106.
GAN Xiaohua, LI Wei. A summary of military aeroengine life determination methods [J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2000, 1(2): 103-106. (in Chinese)
- [8] 王博,刘媛,洪其麟,等.对军用航空发动机可靠性参数体系选择和指标确定的探讨[J].燃气涡轮试验与研究,2003,16(2):38-42.
WANG Bo, LIU Yuan, HONG Qilin, et al. Discussion on the selection of reliability parameter system and targets for military aeroengines[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2003, 16(2): 38-42. (in Chinese)
- [9] 徐可君,江龙平.军用航空发动机可靠性和寿命管理[J].中国工程科学,2003,5(1):82-88.
XU Kejun, JIANG Longping. Reliability and life management on aero-engine used in Army[J]. Engineering Science, 2003, 5(1): 82-88. (in Chinese)
- [10] 王通北,陈美英.谈航空发动机工作可靠性的几个问题[J].航空发动机,2005,31(1):1-5.
WANG Tongbei, CHEN Meiyang. Some issues on aeroengine operational reliability[J]. Aeroengine, 2005, 31(1): 1-5. (in Chinese)
- [11] DEF. STAN 00-971 General specification for aircraft gas turbine engine[S]. UK: Ministry of Defense, 1987: A-5.
- [12] 卢小艳,陆山.基于对数正态分布第 k 试验寿命的分散系数法[J].航空动力学报,2006,21(4):738-740.
LU Xiaoyan, LU Shan. Life scatter factor method based on the k th order experimental life with logarithm normal distribution [J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(4): 738-740. (in Chinese)
- [13] JSGS-87231A Joint services guide specification [S]. USA: United States Air Force, 1995: 69.
- [14] 陆山,吕鸿雁.小子样零构件可靠寿命零故障试验评估方法[J].机械强度,2006,28(3):411-414.
LU Shan, LYU Hongyan. Assessment method of reliable life by zero failure experiments of small sample components[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(3): 411-414. (in Chinese)
- [15] 赵选民,徐伟,师义民,等.数理统计[M].第2版.北京:科学出版社,2002:10-12.
ZHAO Xuanmin, XU Wei, SHI Yimin, et al. Mathematical statistics [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2002: 10-12. (in Chinese)

(编辑:刘 静)